$(\mathbb{R}, \rho)$ διακριτός μ.χ.

$C(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : \rho(x,0) \leq 1\} = \mathbb{R}$

$\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$ με $\bigcup \mathcal{C} = \mathbb{R}$

Εφαρμογή

Έστω (E, ρ) μ.χ.

Κάθε κλειστή σφαιρική περιοχή του E είναι συμπαγές σύνολο.

Ν.δ.ο. E πλήρης

Απόδειξη

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία εν E. Άρα υπάρχει $a \in E$ κ $r \in \mathbb{R}$

$\{a_\nu : \nu \in \mathbb{N}\} \subseteq C(a,r)$ συμπαγές. Άρα η $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ έχει

συγκλίνουσα υπακολουθία $\xrightarrow{(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \text{ βασική}}$ $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα

Εφαρμογή

E συμπαγής μ.χ. $K \subseteq E$

Ν.δ.ο. K κλειστό $\Longleftrightarrow \left(\forall \underset{\text{συμπαγές}}{S \subseteq E}\right) : S \cap K$ κλειστό

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ K κλειστό κ $S \subseteq E$, S συμπαγές. Άρα E συμπαγές άρα
S κλειστό άρα $S \cap K$ κλειστό

$(\Leftarrow)$ Για $S = E$ έχουμε $E \cap K = K$ κλειστό

Εφαρμογή

- I διάστημα στο $\mathbb{R}$, $\underset{\text{συν.}}{f} : I \to \mathbb{R}$

  Ν.δ.ο. το γράφημα της f είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

  Απόδειξη

  $G_f = \{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$

  I διάστημα $\Rightarrow$ I συνεκτικό στον $(\mathbb{R}, |\,|)$

  $G_f = \mathcal{R}(g)$ με $g(x) = (x, f(x))$, $x \in I$ με g συνεχής

  I συνεκτικό $\xrightarrow{g \text{ συν.}}$ $g(I)$ συνεκτικό άρα G_f συνεκτικό

- Όμοια αν I είναι συμπαγές τότε G_f συμπαγές

(90)

Εφαρμογή

Έστω $f:[0,1]\to[0,1]$ με f συνεχής

Ν.δ.ο. η f έχει σταθερό σημείο

Απόδειξη

Αν $f(0)=0$ ή $f(1)=1$ το συμπέρασμα ισχύει

Υποθέτουμε ότι $f(0)>0$ και $f(1)<1$

~~Άρα αρκεί ν.δ.ο. $\exists\, \alpha\in(0,1): f(\alpha)=\alpha$~~

Το G_f είναι συνεκτικό σύνολο.

Θεωρώ τα $G_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<y\}$ και $G_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>y\}$ ανοιχτά

Έστω η f δεν έχει σταθερό σημείο άρα

$\{G_1,G_2\}$ ανοιχτή κάλυψη του G_f

- $G_1\cap G_f\neq\emptyset\neq G_2\cap G_f$ γιατί $(0,f(0))\in G_1$ και $(1,f(1))\in G_2$
- $G_1\cap G_2\cap G_f=\emptyset$ προφανώς γιατί $\{G_1,G_2\}$ διαμέριση του G_f

ΑΤΟΠΟ γιατί G_f συνεκτικό

$G_1^c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq y\}$

Έστω $(x_\nu,y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολ. εν G_1^c, συγκλίνουσα εν $\mathbb{R}^2$

$\lim_{\nu\in\mathbb{N}}(x_\nu,y_\nu)=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \Rightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu=\alpha$ και $\lim y_\nu=\beta$

Ισχύει $x_\nu\geq y_\nu \Rightarrow \lim x_\nu \geq \lim y_\nu \Rightarrow \alpha\geq\beta \Rightarrow (\alpha,\beta)\in G_1^c$

άρα G_1^c κλειστό $\Rightarrow G_1$ ανοιχτό